

Control 5 Introducción al álgebra MA1101

Punto Problema 1

Sea $(G, *)$ un grupo con elemento neutro $e \in G$. Se define en $G \times G$ la ley de composición interna Δ como:

$$(a, b) \Delta (c, d) = (a * c, b * d), \quad \forall (a, b), (c, d) \in G \times G.$$

i) Pruebe que $(G \times G, \Delta)$ es un grupo.

La cerradura está garantizada al indicarse en el enunciado que Δ es l.c.i. en $G \times G$.

= Asociatividad:

Para $(a, b), (c, d), (e, f) \in G \times G$ se tiene

$$\text{Definición: } (a, b) \Delta ((c, d) \Delta (e, f)) = (a, b) \Delta (c * e, d * f) = (a * (c * e), b * (d * f))$$

$$\text{por asociatividad en } (G, *) = ((a * c) * e, (b * d) * f)$$

$$\text{Definición} = (a * c, b * d) \Delta (e, f)$$

$$\text{Definición} = ((a, b) \Delta (c, d)) \Delta (e, f)$$

Segue que Δ es l.c.i. asociativa en $G \times G$.

= Neutro: (m_1, m_2) y $(a, b) \in G \times G$

$$\text{Debe cumplirse que } (a, b) \Delta (m_1, m_2) = (m_1, m_2) \Delta (a, b) = (a, b)$$

$$\text{es, } (a, b) \Delta (m_1, m_2) = (a * m_1, b * m_2) = (a, b)$$

$$\Rightarrow a * m_1 = a \wedge b * m_2 = b \Rightarrow m_1 = m_2 = e \in G.$$

Segue que $(m_1, m_2) = (e, e) \in G \times G$ que se verifica fácilmente por la izquierda.

= Inverso: Para $(a, b) \in G \times G$ debe existir $(a', b') \in G \times G$ tal que $(a, b) \Delta (a', b') = (a', b') \Delta (a, b) = (e, e)$

$$\text{Entonces } (a * a', b * b') = (e, e) \Rightarrow a * a' = e \wedge b * b' = e$$

$$\text{de donde } a' = a^{-1} \in G \wedge b' = b^{-1} \in G \Rightarrow \forall (a, b) \in G \times G$$

(a^{-1}, b^{-1}) es su inverso en $G \times G$ que verifica por la izquierda

ii) Suponga, ahora, que $(G, *)$ es un grupo abeliano y considere la función $f: G \times G \rightarrow G$; $f((a,b)) = (a * b)^{-1}$.
Demuestre que f es un homomorfismo de $(G \times G, \Delta)$ en $(G, *)$.

En efecto, $\forall (a,b), (c,d) \in G \times G$

$$f((a,b) \Delta (c,d)) = f((a * c, b * d)) = [(a * c) * (b * d)]^{-1} \quad \text{Definición}$$

$$= (c * d)^{-1} * (a * b)^{-1} = (d^{-1} * c^{-1}) * (b^{-1} * a^{-1}) \quad \text{Propiedad de Grupos}$$

$$= (b^{-1} * a^{-1}) * (d^{-1} * c^{-1}) \quad (G, *) \text{ es abeliano}$$

$$= (a * b)^{-1} * (c * d)^{-1} \quad \text{Propiedad en } (G, *)$$

$$= f((a,b)) * f((c,d))$$

Entonces $f((a,b) \Delta (c,d)) = f((a,b)) * f((c,d))$ es Morfismo.

iii) ¿Es f un isomorfismo? Justifique.

f es un isomorfismo si es un homomorfismo biyectivo.

Sin embargo f NO es biyectiva porque no es Inyectiva.

$$\text{Por ejemplo } f((a,e)) = f((e,e)) = (a * e)^{-1} = (e * a)^{-1} = a^{-1}$$

$$\text{Pero } (a,e) \neq (e,e).$$

Así, f no es inyectiva y por lo tanto no es biyectiva.

Segue que f no es isomorfismo.

(OBSERVACION: f es sobreyectiva, pero no se pide.)

Pregunta Problema 2

a) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G . Probar que el conjunto $H * K$ definido por
 $H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$ es subgrupo de $(G, *)$

• Sean $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$, así $h_1 * k_1, h_2 * k_2 \in H * K$
 Usando la propiedad compacta, para demostrar que
 $(H * K, *)$ es subgrupo de $(G, *)$ debemos probar que

(1.0) $\rightarrow (h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)^{-1} \in H * K$

En efecto, $(h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)^{-1} = (h_1 * k_1) * (k_2^{-1} * h_2^{-1})$

$= h_1 * (k_1 * k_2^{-1}) * h_2^{-1}$ por asociatividad

(1.0) $\rightarrow = (h_1 * h_2^{-1}) * (k_1 * k_2^{-1})$ $*$ es ley conmutativa

Como H y K son subgrupos, $h_1 * h_2^{-1} \in H$ y $k_1 * k_2^{-1} \in K$

(1.0) \rightarrow Sigue que $(h_1 * h_2^{-1}) * (k_1 * k_2^{-1}) \in H * K$

b) Sea $(G, *)$ un grupo finito de orden 4, es decir $|G| = 4$, con neutro $e \in G$

Prueba que $\forall a \in (G - \{e\})$, $a^3 \neq e$ ($a^3 = a * a * a$)

(1.0) \rightarrow Supongamos por contradicción que $\exists a \in (G - \{e\})$; $a^3 = e$
 Entonces $a^3 = a^2 * a = e \Rightarrow a^{-1} = a^2 \wedge (a^2)^{-1} = a$

Sigue que $(\{e, a, a^2\}, *)$ es grupo ($a^2 * a^2 = a^3 * a = e * a = a$)
 y por lo tanto $\{e, a, a^2\}$ es subgrupo de $(G, *)$

(2.0) \rightarrow Pero esto contradice al Teorema de Lagrange porque $\{e, a, a^2\}$ es de orden 3 que no es divisor de $|G| = 4$

Así, $\forall a \in (G - \{e\})$, $a^3 \neq e$.